

Políedres i papiroflèxia modular

JAUME COLL GUERRERO

La papiroflèxia és la manera més fàcil
de conèixer la geometria.

Joan Bascuñana, artista de la vida olotí

Resum: En aquest treball s'expliquen tècniques de papiroflèxia modular que ens permeten fer amb paper una gran varietat de políedres: els cinc sòlids platònics, els tretze políedres arquimedians, els vuit deltaedres convexos i les seves estelacions, prismes, antiprismes, piràmides i cúpules geodèsiques fullerianes, entre d'altres.

Paraules clau: papiroflèxia modular, políedres, sòlids platònics, políedres arquimedians, tècniques de papiroflèxia, tessellacions.

Classificació MSC2020: 00A08, 00A66, 05B45, 51M20, 52B05, 52B10.

Introducció

Ara fa cinquanta anys es va publicar amb el nom de *caixa de colors* un cub de paper que actualment és molt popular i que es coneix com a *cub de Sonobe*. Aquesta figura de paper es construeix a partir de sis mòduls bàsics que s'uneixen mitjançant pestanyes i butxaques, sense utilitzar cola, per formar un cub. El cub de Sonobe va donar lloc al naixement de tota una nova branca de la papiroflèxia: la papiroflèxia modular. Des d'aleshores s'han creat altres mòduls per fer políedres modulars en paper, com el tetràedre i l'octàedre de Kuni-hiko Kasahara (Omnibus Origami, 1988), l'icosàedre de Tomoko Fuse (BOS Convention, 1987), el dodecàedre de Lewis Simon (*Pajarita* núm. 26, 1989), el cubooctàedre de Lewis Simon (*Pajarita Extra*, 1988), el cub truncat d'Oriol Bach (*Pajarita* núm. 29, 1989), el rombicuboctàedre de Natale Fietta (CDO, 1986) o el dodecàedre ròmbic de David Brill (BOS Convention, 1986).

Tots aquests mòduls s'uneixen de la mateixa manera que el cub de Sonobe i l'essència de la majoria d'aquests mòduls és aconseguir un angle molt concret per fer els polígons que formaran el políedre.

Cal destacar un mòdul de tipus aresta molt versàtil, flexible i resistent, el Kantenmodul (2002), de l'alemanya Carmen Sprung; amb aquest mòdul es poden construir una gran varietat de políedres, com per exemple quatre dels cinc sòlids platònics, la família dels vuit deltaedres convexos, molts deltaedres còncaus, prismes, antiprismes, piràmides, cúpules fullerianes, triangulacions de sòlids platònics i arquimedians, etc.

També cal destacar els mòduls aresta de 120 graus (1987), 135 graus (1987) i 144 graus (2013) de l'origamista de Singapur Francis Ow (1949–2018), que permeten fer els tretze políedres arquimedians. La col·lecció dels tretze políedres arquimedians fets amb origami modular fou exposada per Dirk Eisner l'any 2011 a Friburg de Brisgòvia en la 6 Internationale Tagunz Zur Faltikdidaktik, convenció de papiroflèxia organitzada per Nick Robinson i el badaloní Joan Sallas. Els mòduls utilitzats en aquestes figures i dissenyats l'any 2007 conjuntament per Tomoko Fuse, Dirk Eisner i el mateix Francis Ow eren variants dels mòduls de Francis Ow.

Acabem la introducció explicant l'estructura d'aquest article. A la primera part del treball es fan algunes observacions sobre l'origen dels políedres i es demostra que tan sols existeixen cinc sòlids platònics o regulars i tretze políedres arquimedians o semiregulars.

A la segona part del treball es descriuen els mòduls aresta de Francis Ow i el mòdul aresta Kantenmodul de Carmen Sprung i es veuen algunes de les seves possibilitats. En aquesta part del treball descriurem una generalització dels mòduls aresta de 120 i 135 graus de Francis Ow. Aquesta generalització descriu un procediment que ens permet canviar l'angle general per un altre de concret, obtenir casos particulars de mòduls aresta i construir altres tipus de políedres. Els mòduls aresta de 120 i 135 graus de Francis Ow són casos particulars d'aquest mètode més general.

A la tercera part del treball es descriu el mòdul de Sonobe i també es veuen algunes de les seves possibilitats, en particular la construcció de fractals, com l'esponja de Menger. En aquest apartat es calcula i es demostra quin és el gènere de la superfície que s'obté en l'enèsima iteració per definir aquest fractal.

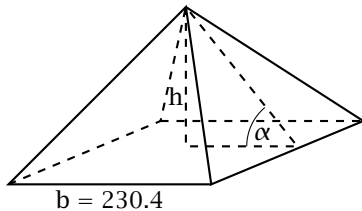
La darrera part del treball està dedicada a la construcció amb papiroflèxia modular de mosaics plans. Veurem que alguns motius de l'Alhambra de Granada també poden tessellar un cub i en farem efectius dos: l'avió nassarita i l'os nassarita. El treball finalitza amb la construcció d'una figura no modular multiforme inspirada en un tercer motiu dels mosaics de l'Alhambra de Granada: un tetraèdre no modular construït a partir d'un ocellet nassarita tridimensional.

1 Políedres

1.1 Els humans i els políedres

Fa milers d'anys que els humans coneixen els políedres. Un dels exemples més antics, enigmàtic i emotiu és la gran piràmide de Kheops, segon faraó de la IV dinastia egípcia. Aquesta construcció faraònica està situada a la planura de Guiza, avui dia al costat de la ciutat del Caire o Al-Qahira (la Victòria). Essent

la més gran de totes les piràmides egípcies, té una alçària de $h = 146.6$ m i el costat de la base fa $b = 230.4$ m de longitud, de la qual cosa podem deduir que la seva inclinació té un valor numèric que es pot aproximar per l'arrel quadrada del nombre auri $m = \tan(\alpha) \approx \sqrt{\phi}$, amb un error relatiu del 0.04 %, o també un valor aproximat de $m = \tan(\alpha) \approx \sqrt[12]{18}$, amb un error relatiu del 0.01 %. En la resta de les piràmides de l'antic Egipte no es donen aquestes aproximacions numèriques i, per tant, cal esperar que aquestes i d'altres aproximacions expressades amb funcions senzilles siguin casualitats numèriques.



Altres políedres força enigmàtics es poden veure en el Museu Galoromà Lugdunum de la ciutat francesa de Lió. A més de daus i compassos de l'època romana, aquest museu té dos dodecaedres de bronze datats al voltant dels segles II i III de la nostra era. En les seves dotze cares foradades per cercles de diferents mides es poden veure algunes marques circulars, i en cadascun dels seus vint vèrtexs que connecten les trenta arestes hi ha unes petites esferes. Avui dia es coneixen més de cent d'aquests dodecaedres, la majoria trobats a França, i un únic icosaedre al LVR-Landesmuseum de Bonn. Encara no es coneix quina era la utilitat d'aquests objectes perquè no se n'han trobat referències històriques documentades.

Com han arribat els humans a conèixer figures geomètriques tan regulars? Una part de la resposta és que observessin aquestes formes geomètriques a la natura. Molts minerals cristallitzen macroscòpicament en diferents tipus de políedres força regulars. Aquest procés natural es produeix a l'escorça de la terra des de milions d'anys abans de l'aparició dels humans. Així, tenim que la pirita cristallitza en cubs, octàedres i dodecaedres, i la fluorita i la magnetita, en octàedres gairebé perfectes per a l'ull humà. Aquests són tres exemples de políedres en què totes les cares són polígons regulars iguals i en tots els vèrtexs conflueix el mateix nombre de cares. Aquests políedres s'anomenen *políedres regulars* o *sòlids platònics* en honor de Plató, que els menciona en el *Timeu* [10]: «El foc està format per tetràedres; l'aire, d'octàedres; l'aigua, d'icosaedres; la terra, de cubs; com que encara és possible una cinquena forma, Déu ha utilitzat aquesta, el dodecaedre pentagonal, perquè serveixi de límit al món».

La pirita també pot cristallitzar en forma de cubooctàedre, que és un políedre semiregular format per sis quadrats i vuit hexàgons regulars. Un darrer exemple és el granat, que pot cristallitzar com a dodecaedre ròmbic, que és un dels tretze políedres de Catalan.

Els políedres semiregulars també s'anomenen *políedres* o *sòlids arquimediàns* en honor d'Arquimedes de Siracusa (segle III aC). Tot i que no es conserven traduccions de l'obra original d'Arquimedes que parlin d'aquests políedres, hi ha referències d'autors grecs, com Papos d'Alexandria (segle IV dC), que en el llibre V secció XIX de la seva *Collecció matemàtica*, dedicada als cossos sòlids, descriu els cinc políedres platònics i tretze políedres formats per diferents polígons equilàters i equiangles que atribueix a Arquimedes [19].

1.2 Políedres platònics i arquimediàns

Els políedres estan formats per elements de dimensió 2 (les cares C), de dimensió 1 (les arestes A) i de dimensió zero (els vèrtexs V). Per a qualsevol políedre homeomorf a l'esfera, aquests elements estan relacionats per la fórmula d'Euler:

$$C + V = A + 2. \quad (1)$$

Leonhard Euler (Basilea, 1707 - Sant Petersburg, 1783) va proposar aquesta igualtat en una carta escrita a Berlín amb data 14 de novembre de 1750 i dirigida al seu amic Christian Goldbach, que vivia a Sant Petersburg. La primera demostració rigorosa de la fórmula d'Euler no fou donada fins al 1847 per Karl von Staudt [16]. Aquesta equació diofàntica lineal (1) té infinites solucions, però no totes les solucions es corresponen a un políedre; per exemple, no existeix cap políedre amb els valors $C = V = A = 2$, tot i que aquests valors compleixen la relació d'Euler $2 + 2 = 2 + 2$.

A continuació ens centrarem en els políedres convexos, que tenen certa regularitat en les cares i en els vèrtexs.

DEFINICIÓ 1. Direm que un políedre convex és regular o platònic si totes les seves cares són polígons regulars d'un únic tipus i en cada vèrtex conflueix el mateix nombre de cares.

Altres políedres força regulars són els prismes regulars i els antiprismes regulars. Aquests políedres estan formats per dos polígons regulars paral·lels de n costats units per n quadrats i per $2n$ triangles equilàters, respectivament. Existeixen infinits prismes regulars i infinits antiprismes regulars, un per cada polígon regular. El prisma regular amb base un quadrat és el cub i l'antiprisma regular amb base un triangle equilàter és l'octàedre.

DEFINICIÓ 2. Direm que un políedre convex, que no sigui un prisma o antiprisma, és semiregular o arquimedià si totes les seves cares són polígons regulars de dos o més tipus i en cada vèrtex conflueix el mateix tipus de cares i en el mateix ordre.

Per demostrar que tan sols existeixen cinc políedres platònics i tretze políedres arquimediàns, imposarem les respectives condicions de regularitat a la fórmula d'Euler.

TEOREMA 3. *Tan sols existeixen cinc políedres regulars o platònics.*

PROVA. Cada aresta està limitada per dos vèrtexs. A cada aresta conflueixen dues cares, i dues cares comparteixen com a màxim una única aresta.

Com que el políedre és regular, totes les cares que el formen són polígons regulars amb n arestes i n vèrtexs; a més, a cada vèrtex del poliedre conflueixen m cares i m arestes. Evidentment, $n \geq 3$ i $m \geq 3$. Aquesta informació ens permet obtenir relacions entre el nombre de cares C , el nombre d'arestes A i el nombre de vèrtexs V :

$$A = \frac{nC}{2}, \quad V = \frac{nC}{m}, \quad V = \frac{2A}{m}.$$

Substituint aquestes expressions en la fórmula d'Euler (1), obtenim els valors $C, A, V \in \mathbb{N}$ en funció dels paràmetres naturals $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C + \frac{nC}{m} &= \frac{nC}{2} + 2 \Rightarrow C = \frac{4m}{2n + 2m - nm}, \\ \frac{2A}{n} + \frac{2A}{m} &= A + 2 \Rightarrow A = \frac{2nm}{2n + 2m - nm}, \\ \frac{mV}{n} + V &= \frac{mV}{2} + 2 \Rightarrow V = \frac{4n}{2n + 2m - nm}. \end{aligned} \quad (2)$$

Ara cal resoldre aquestes tres noves equacions diofàntiques algebraiques. Primer de tot veurem que un dels paràmetres val 3: $n = 3$ o bé $m = 3$. En efecte, és evident que el denominador d'aquestes expressions és positiu:

$$2n + 2m - nm > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Si els dos paràmetres són diferents de 3, aleshores $n \geq 4$ i $m \geq 4$, i obtenim la contradicció següent:

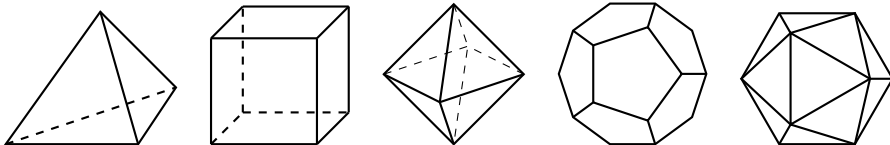
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}.$$

Si $n = 3$, de la desigualtat (3) deduïm que $m \leq 5$, i per simetria de les variables n, m en la mateixa desigualtat (3), tenim que $n \leq 5$ si $m = 3$. Així doncs, tenim cinc possibilitats, i amb les expressions (2) podem deduir el nombre de cares, arestes i vèrtexs.

n	m	C	A	V	
3	5	20	30	12	Icosàedre
3	4	8	12	6	Octàedre
3	3	4	6	4	Tetràedre
4	3	6	12	8	Cub
5	3	12	30	20	Dodecàedre

□

Observem que el nombre d'arestes sempre és un múltiple de 6 i que el nombre de cares i de vèrtexs és parell.



Canviant la condició de convex per còncav, s'obté una família de quatre políedres regulars còncavs, coneguts amb el nom de *políedres de Kepler-Poinsot*.

Seguint els passos de la demostració anterior i amb un argument més elaborat, es pot demostrar que tan sols existeixen tretze políedres arquimedians o semiregulars [2].

Prèviament veurem tres lemes que ens permetran descartar molts possibles casos. Definim s com el nombre de tipus de polígons regulars diferents que té el políedre arquimedià.

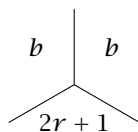
LEMA 4. *En cada vèrtex d'un políedre semiregular o arquimedià no poden confluïr quatre o més tipus de polígons diferents. És a dir, $s \leq 3$.*

PROVA. Suposem el contrari; aleshores els angles interiors dels polígons regulars que formin el políedre arquimedià seran superiors o iguals a $\frac{\pi}{3}$ rad (60 graus, triangle equilàter), $\frac{\pi}{2}$ rad (90 graus, quadrat), $\frac{3\pi}{5}$ rad (108 graus, pentàgon regular) i $\frac{2\pi}{3}$ rad (120 graus, hexàgon regular). D'aquí obtenim la contradicció següent:

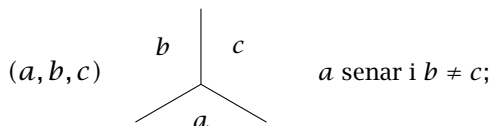
$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} = \frac{21}{10}\pi > 2\pi,$$

perquè la suma dels angles interiors dels polígons regulars que conflueixen en un mateix vèrtex ha de ser inferior a 2π rad, ja que el políedre és convex. $\square$

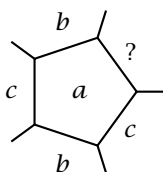
LEMA 5. *Si a cada vèrtex d'un políedre semiregular o arquimedià hi conflueixen tres polígons i un d'ells té un nombre senar de cares, aleshores els altres dos polígons han de tenir el mateix nombre de cares.*



PROVA. Suposem el contrari, és a dir, existeix una configuració del tipus

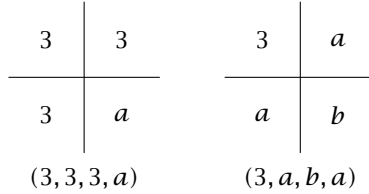


aleshores un dels vèrtexs del polígon amb un nombre senar de costats no tindrà la mateixa configuració, degut a l'alternança dels valors b, c al voltant del polígon amb un nombre senar de costats. Ho il·lustrem amb un pentàgon.



$\square$

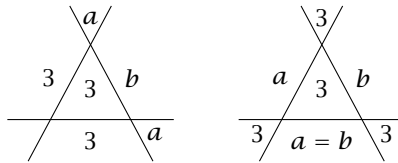
LEMA 6. Si a cada vèrtex d'un políedre semiregular o arquimedià hi conflueixen quatre polígons i com a mínim un d'ells és un triangle equilàter, aleshores les úniques configuracions de vèrtexs són $(3, 3, 3, a)$ i $(3, a, b, a)$ amb $a \neq 3$, és a dir, podem aconseguir una configuració de vèrtexs on un dels triangles equilàters té els dos polígons adjacents amb el mateix nombre de cares.



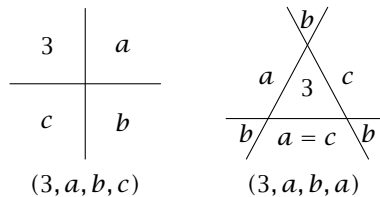
PROVA. Si a cada vèrtex conflueixen quatre triangles equilàters, aleshores tenim un políedre regular.

Si a cada vèrtex conflueixen exactament tres triangles equilàters, aleshores obtenim la configuració de vèrtexs dels antiprismes $(3, 3, 3, n)$.

Si a cada vèrtex conflueixen exactament dos triangles equilàters, aleshores tenim dues possibilitats $(3, 3, a, b)$ (triangles equilàters adjacents) i $(3, a, 3, b)$ (triangles equilàters oposats). Els dos casos no són possibles com s'il·lustra en el dibuix següent:



Si a cada vèrtex conflueix exactament un triangle equilàter, aleshores en la configuració $(3, a, b, c)$ la cara de b costats sempre està oposada al triangle equilàter, de la qual cosa es dedueix que $a = c$.



□

TEOREMA 7. Tan sols existeixen tretze políedres semiregulars o arquimedians.

PROVA. La demostració d'aquest teorema es divideix en l'anàlisi de diferents casos. Observem que en un mateix vèrtex no poden confluir més de cinc polígons, perquè aleshores la suma dels angles seria superior als 2π rad. Utilitzem la notació següent: $n(c)$ vol dir n polígons de c costats, $\{\geq n\}(c)$ vol dir un nombre superior o igual a n polígons de c costats, $n(2m \geq c)$ vol dir n polígons amb c o més costats que compleixen la condició $m \geq c/2$.

1. Poliedres formats tan sols per triangles equilàters i quadrats.

(4, 3, 3)	en contradicció amb el lema 5
(4, 3, 3, 3)	antiprisma quadrangular
(4, 3, 3, 3, 3)	$s = 2, m_3 = 4, m_4 = 1, m = 5$ (I) cub xato
$1(4) + \{\geq 5\}(3)$	La suma d'angles supera 2π
(4, 4, 3)	prisma triangular
(4, 4, 3, 3)	en contradicció amb el lema 6
(4, 3, 4, 3)	$s = 2, m_3 = 2, m_4 = 2, m = 4$ (II) cubooctàedre
$2(4) + \{\geq 3\}(3)$	La suma d'angles val $\geq 2\pi$
(4, 4, 4, 3)	$s = 2, m_3 = 1, m_4 = 3, m = 5$ (III) rombicuboctàedre
$3(4) + \{\geq 2\}(3)$	La suma d'angles supera 2π
$\{\geq 4\}(4) + \{\geq 1\}(3)$	La suma d'angles supera 2π

2. Poliedres formats tan sols per triangles equilàters i pentàgons.

(5, 3, 3)	en contradicció amb el lema 5
(5, 3, 3, 3)	antiprisma pentagonal
(5, 3, 3, 3, 3)	$s = 2, m_3 = 4, m_5 = 1, m = 5$ (IV) dodecàedre xato
$1(5) + \{\geq 5\}(3)$	La suma d'angles supera 2π
(5, 5, 3)	en contradicció amb el lema 5
(5, 5, 3, 3)	en contradicció amb el lema 6
(5, 3, 5, 3)	$s = 2, m_3 = 2, m_5 = 2, m = 4$ (v) icosidodecàedre
$2(5) + \{\geq 3\}(3)$	La suma d'angles supera 2π
$\{\geq 3\}(5) + \{\geq 1\}(3)$	La suma d'angles supera 2π

3. Poliedres formats tan sols per triangles equilàters i hexàgons.

(6, 3, 3)	en contradicció amb el lema 5
(6, 3, 3, 3)	antiprisma hexagonal
$1(6) + \{\geq 4\}(3)$	La suma d'angles val $\geq 2\pi$
(6, 6, 3)	$s = 2, m_3 = 1, m_6 = 2, m = 3$ (VI) tetràedre truncat
$2(6) + \{\geq 2\}(3)$	La suma d'angles val $\geq 2\pi$
$\{\geq 3\}(6) + \{\geq 1\}(3)$	La suma d'angles val $\geq 2\pi$

4. Políedres formats tan sols per triangles equilàters i n -àgons, $n \geq 7$.

$(n, 3, 3)$	en contradicció amb el lema 5
$(n, 3, 3, 3)$	antiprisma n -gonal
$1(n) + \{\geq 4\}(3)$	La suma d'angles supera 2π
$(8, 8, 3)$	$s = 2, m_3 = 1, m_8 = 2, m = 3$ (VII) cub truncat
$(10, 10, 3)$	$s = 2, m_3 = 1, m_{10} = 2, m = 3$ (VIII) dodecaèdre truncat
$(2n + 1, 2n + 1, 3)$	en contradicció amb el lema 5
$2(2m \geq 12) + \{\geq 1\}(3)$	La suma d'angles supera 2π
$2(n) + \{\geq 2\}(3)$	La suma d'angles supera 2π
$\{\geq 3\}(n) + \{\geq 1\}(3)$	La suma d'angles supera 2π

5. Políedres formats tan sols per quadrats i n -àgons, $n \geq 5$.

$(n, 4, 4)$	prisma n -gonal
$1(n) + \{\geq 3\}(4)$	La suma d'angles supera 2π
$(2n + 1, 2n + 1, 4)$	en contradicció amb el lema 5
$(6, 6, 4)$	$s = 2, m_4 = 1, m_6 = 2, m = 3$ (IX) octaèdre truncat
$(6, 6, 4, 4)$	La suma d'angles supera 2π
$2(2m \geq 8) + \{\geq 1\}(4)$	La suma d'angles supera 2π
$\{\geq 3\}(n) + \{\geq 1\}(4)$	La suma d'angles supera 2π

6. Políedres formats tan sols per pentàgons i n -àgons, $n \geq 6$.

$(n, 5, 5)$	en contradicció amb el lema 5
$1(n) + \{\geq 3\}(5)$	La suma d'angles supera 2π
$(6, 6, 5)$	$s = 2, m_5 = 1, m_6 = 2, m = 3$ (X) icosaèdre truncat
$2(2m \geq 7) + \{\geq 1\}(5)$	La suma d'angles supera 2π
$\{\geq 3\}(n) + \{\geq 1\}(5)$	La suma d'angles supera 2π

7. Políedres formats tan sols per dos tipus diferents de n -àgons, $n \geq 6$.

Aquest cas és impossible perquè la suma dels angles interns sempre és superior a 2π .

8. Políedres formats tan sols per triangles equilàters, quadrats i n -àgons, $n \geq 5$.

$(n, 4, 3)$	en contradicció amb el lema 5
$(n, 4, 3, 3)$	en contradicció amb el lema 6
$(n, 3, 4, 3)$	en contradicció amb el lema 6
$(n, 3, 3, 4)$	en contradicció amb el lema 6
$(5, 4, 4, 3)$	en contradicció amb el lema 6

(5, 4, 3, 4)	$s = 3, m_3 = 1, m_4 = 2, m_5 = 1, m = 4$ (XI) petit rombicododecàedre
(5, 3, 4, 4)	en contradicció amb el lema 6

$1(n) + 1(4) + \{\geq 3\}(3)$	La suma d'angles supera 2π
$1(n \geq 6) + \{\geq 1\}(4) + \{\geq 1\}(3)$	La suma d'angles supera 2π
$\{\geq 2\}(n) + \{\geq 1\}(4) + \{\geq 1\}(3)$	La suma d'angles supera 2π

9. Poliedres formats tan sols per tres tipus de polígons que no siguin triangles.

En aquest darrer cas la suma de quatre angles interns diferents sempre és superior a 2π :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 > 4 \cdot \pi / 2 = 2\pi.$$

Per tant, en cada vèrtex conflueixen tres polígons regulars diferents que, degut al lema 5, tindran un nombre parell de costats; en aquesta situació les úniques combinacions que no superen els 2π radians són:

(8, 6, 4)	$s = 3, m_4 = 1, m_6 = 1, m_8 = 1, m = 3$ (XII) gran rombicuboctàedre
(10, 6, 4)	$s = 3, m_4 = 1, m_6 = 1, m_{10} = 1, m = 3$ (XIII) gran rombicododecàedre

□

Els arguments anteriors són de tipus local i no hem utilitzat la característica d'Euler-Poincaré del poliedre. Per calcular el nombre exacte de cares, vèrtexs i arestes d'aquests poliedres, definim C_n com el nombre de n -àgons de n arestes i n vèrtexs d'un poliedre arquimedià, m com el nombre de cares o arestes que conflueixen en un vèrtex i m_i com el nombre de cares n_i -gonals que conflueixen en un vèrtex.

TEOREMA 8. *El nombre de vèrtexs, cares i arestes dels poliedres arquimedians ve donat per la taula de valors següent.*

	Poliedre	Vèrtexs	Arestes	Cares
(I)	<i>cub xato</i>	24	60	38
(II)	<i>cuboctàedre</i>	12	24	14
(III)	<i>petit rombicuboctàedre</i>	24	48	26
(IV)	<i>dodecàedre xato</i>	60	150	92
(V)	<i>icosidodecàedre</i>	30	60	32
(VI)	<i>tetràedre truncat</i>	12	18	8
(VII)	<i>cub truncat</i>	24	36	14
(VIII)	<i>dodecàedre truncat</i>	60	90	32
(IX)	<i>octàedre truncat</i>	24	36	14
(X)	<i>icosàedre truncat</i>	60	90	32
(XI)	<i>petit rombicododecàedre</i>	60	120	62
(XII)	<i>gran rombicuboctàedre</i>	48	72	26
(XIII)	<i>gran rombicododecàedre</i>	120	180	62

PROVA. Utilitzant el mateix argument que en el cas platònic deduïm:

$$C = \sum_{i=1}^s C_{n_i}, \quad A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s n_i C_{n_i}, \quad V = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^s n_i C_{n_i}. \quad (4)$$

En aquest cas el nombre de vèrtexs també compleix les igualtats següents:

$$V = \frac{n_i C_{n_i}}{m_i}, \quad \forall i = 1, \dots, s.$$

Aleshores podem deduir els valors de C_{n_i} resolent el sistema de s equacions lineals en C_{n_i} format per la relació donada per la fórmula d'Euler i $s - 1$ de les equacions anteriors:

$$\sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{n_i}{2} + \frac{n_i}{m}\right) C_{n_i} = 2,$$

$$\frac{n_1 C_{n_1}}{m_1} = \frac{n_i C_{n_i}}{m_i}, \quad \forall i = 2, \dots, s - 1.$$

Concretament, si a cada vèrtex conflueixen dos tipus de polígons ($s = 2$), cal resoldre un sistema de dues equacions i dues incògnites:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{n_1}{2} + \frac{n_1}{m} & 1 - \frac{n_2}{2} + \frac{n_2}{m} \\ -\frac{n_1}{m_1} & \frac{n_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n_1} \\ C_{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i, en el cas que en cada vèrtex conflueixin tres tipus de polígons ($s = 3$), cal resoldre un sistema de tres equacions i tres incògnites:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{n_1}{2} + \frac{n_1}{m} & 1 - \frac{n_2}{2} + \frac{n_2}{m} & 1 - \frac{n_3}{2} + \frac{n_3}{m} \\ -\frac{n_1}{m_1} & \frac{n_2}{m_2} & 0 \\ -\frac{n_1}{m_1} & 0 & \frac{n_3}{m_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n_1} \\ C_{n_2} \\ C_{n_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Els valors m i n_i , m_i , $\forall i = 1, \dots, s$, els hem determinat en la demostració del teorema 7, cosa que permet calcular els valors C_{n_i} , $\forall i = 1, \dots, s$, i també la terna de valors (C, V, A) per a cada tipus de políedre mitjançant les igualtats (4). $\square$

El cub xato i el dodecàedre xato existeixen en dues variants que són isomètriques: la forma levogira i la forma dextrogira. El rombicuboctàedre està format per dues cúpules i un prisma octogonal central; girant 45 graus una d'aquestes cúpules, s'obté l'anomenat *pseudorombicuboctàedre*, també anomenat *sòlid de Sommerville* [14] o *sòlid de Miller* [7]. Aquest políedre té les mateixes propietats de regularitat en els vèrtexs que el rombicuboctàedre, però té menys simetries axials i especulars. El rombicuboctàedre i el pseudorombicuboctàedre no són figures isomètriques.

2 Papiroflèxia d'alguns mòduls aresta

2.1 Què és la papiroflèxia?

Aquesta mateixa pregunta es devien fer el novembre de 1936 els lectors del diari La Prensa de Buenos Aires, en el qual, en una entrevista de Carlos A. Leumann a l'odontòleg burgalès Vicente Solórzano Sagredo, apareix per primer cop la paraula *papiroflèxia*. De fet, en aquest article surten dues paraules creades pel docor Solórzano (vegeu també [12, 13]):

- «papirola: todas las producciones científico-artísticas realizadas con papel.»
- «papiroflexia: El arte de doblar geométricamente el papel.»

Aquestes dues paraules, així com la paraula *papirofléxico*, no van ser incloses al diccionari de la RAE fins l'any 1986, tot i que sí que apareixien en altres diccionaris. El doctor Solórzano també va fundar l'any 1954 el Museu de Papiroflèxia a la ciutat de Buenos Aires. Posteriorment, l'any 1961, aquesta collecció es va traslladar a Valladolid, on un dels seus companys d'estudis, Nemesio Montero Pérez, la va dipositar en el Museu de Ciències Naturals d'aquesta ciutat. Amb els anys, i després d'algunes gestions amb les germanes del doctor Montero, les figures d'aquesta collecció van ser cedides a l'Asociación Española de Papiroflexia (AEP), on es conserven actualment en dos grans baguls, que estan pendants d'estudi i catalogació.

Trenta-sis anys abans de la publicació del llibre del doctor Solórzano, quan encara no existia la paraula *papiroflèxia*, l'escriptor i filòsof Miguel de Unamuno va publicar un apèndix al llibre *Amor y pedagogía* amb el títol *Apuntes para un tratado de cocotología*; en aquest apèndix podem llegir el següent [18]:

La palabra *cocotología* se compone de dos, de la francesa *cocotte*, pajarita de papel, y de la griega *logia*, de *logos*, tratado. La palabra francesa *cocotte* es una palabra infantil y que se aplica en su sentido primitivo y recto a los pollos y por extensión a las aves. En sentido traslaticio, a las pajaritas de papel y a las mozas de vida alegre.

Poques llengües del món tenen una paraula pròpia equivalent a *papiroflèxia*. Trobem la paraula *paper folding* en anglès, *Papierfalten* en alemany, *zhézhǐ* en xinès i *origami* en japonès (de *oru*, «plegar», i *kami*, «paper»). Aquesta darrera paraula és la que s'utilitza en la majoria de llengües del món per designar aquest art de plegar el paper.

Avui dia no està clar que la papiroflèxia s'originés al Japó. D'aquest país, a més d'imposar-se la paraula *origami* en les altres llengües del món, es coneix el llibre més antic dedicat íntegrament a la papiroflèxia. És un anònim de 1797 que porta per títol *Hiden Senbazuru Orikata*, i que podríem traduir per *El secret del plegatge de les 1000 grues*, on es descriuen les construccions de diferents tipus de grues de paper. Del Japó també es coneix documentalment un cub de paper anomenat *Tamatebako* o cofre del tresor, publicat l'any 1734 per Hayato Ohoka en el llibre *Ranma Zushiki*.

A Occident la figura d'origami documentada més antiga que es coneix és la caixa del *Llibre d'hores*, de Caterina de Clèveris (segle xv). Uns 500 anys més

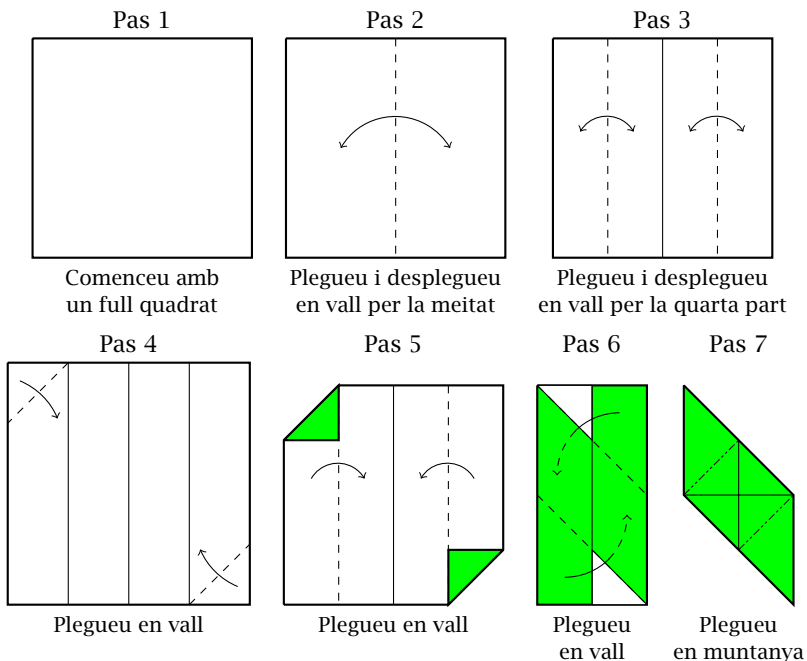
tard podem trobar la descripció de la seva construcció en la figura número 6 del llibre anònim *Una hoja de papel*, publicat per l'Editorial Salvatella [1]. Vicente Palacios Garrido, expresident de l'AEP, va esbrinar que aquest llibre fou escrit per Lorenzo Herrero Sáiz. Molt probablement Lorenzo Herrero no coneixia el *Llibre d'hores*, de Caterina de Clèveris i, per tant, cal esperar que aquesta caixa i d'altres figures tradicionals i molt populars que apareixen en el mateix llibre, com l'*ocellet* (*pajarita* en castellà, *cocotte* en francès), s'hagin transmès per tradició oral al llarg dels segles.

A més de la papiroflèxia clàssica, en què es construeix una figura a partir d'un únic paper, que normalment és un full dinA4 o un paper quadrat, avui dia existeixen diferents branques de la papiroflèxia, com la papiroflèxia modular, en què es construeixen figures de paper unint diverses còpies d'un mateix mòdul (o de diferents mòduls, papiroflèxia multimodular), la papiroflèxia cinètica, en què es construeixen figures de paper amb moviment, o la papiroflèxia multiforme, on apareixen diferents figures en una successió de plects.

En el material suplementari¹ veurem com podem construir amb paper els cinc sòlids platònics i els tretze políedres arquimediàns amb tècniques de papiroflèxia modular.

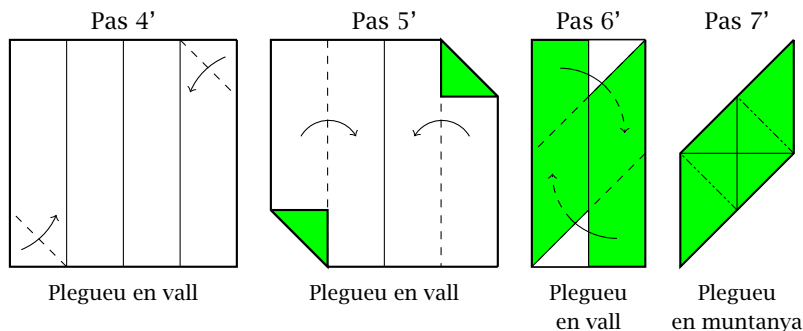
3 El cub de Sonobe

El cub de Sonobe és el cub de paper més popular. Aquest cub és modular i està format per sis mòduls iguals, un per cada cara del cub. El mòdul de Sonobe es construeix fent uns determinats plects en un full quadrat de paper.

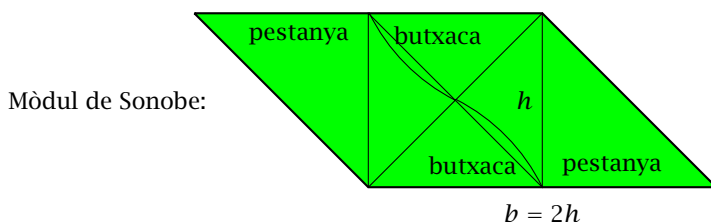


¹ Vegeu el material suplementari a l'edició digital d'aquest volum, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* (en línia) (2024), vol. 39 (1-2), <https://revistes.iec.cat/index.php/BSCM>.

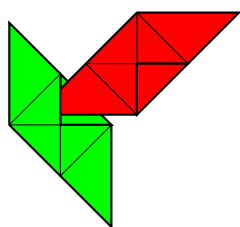
Observem que la construcció del mòdul de Sonobe és asimètrica; en efecte, en el pas 4 hem fet els plecs en dos vèrtexs oposats del quadrat. També es poden fer els plecs triant els altres dos vèrtexs oposats del quadrat i repetir els passos 4 a 7; d'aquesta manera obtenim un mòdul simètric.



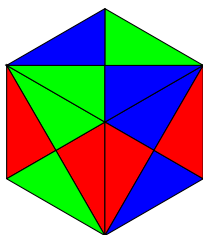
El mòdul de Sonobe té forma de romboide amb angles de 45 i 135 graus, i la seva base és el doble de la seva alçària. Podeu comprovar que cada punt del romboide té quatre capes de paper i, per tant, la seva superfície és la quarta part del quadrat inicial. Per unir els sis mòduls romboidals i formar el cub no cal utilitzar cola; s'uneixen perquè cada mòdul té dues butxaques i dues pestanyes. Les dues butxaques estan situades a la diagonal menor del romboide, que també és una diagonal del quadrat central, i les pestanyes són els dos triangles rectangles isòscels laterals.



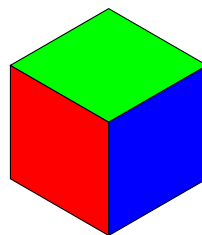
Per unir dos mòduls, en girem un 90 graus i introduïm una pestanya del primer mòdul en una butxaca del segon. La resta dels mòduls s'uneixen de la mateixa manera. El mòdul obtingut en el pas 7 no es pot encaixar de manera natural amb el mòdul del pas 7'. Per construir un cub cal fer sis mòduls idèntics com en el pas 7 o sis mòduls idèntics com el pas 7'; en els dos casos l'efecte visual és el mateix. Si en el pas 7 o 7' fem un plec en vall en lloc de muntanya, aleshores, quan unim sis mòduls, obtenim un cub amb les cares llises, no dividides en triangles.



Unió de dos mòduls



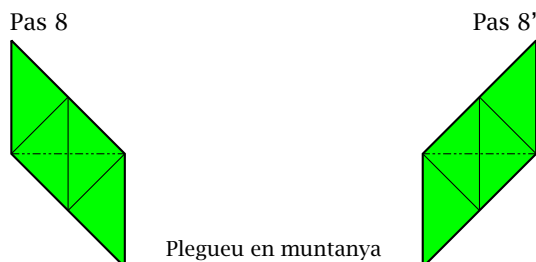
Unió de sis mòduls del pas 7 o 7' en muntanya



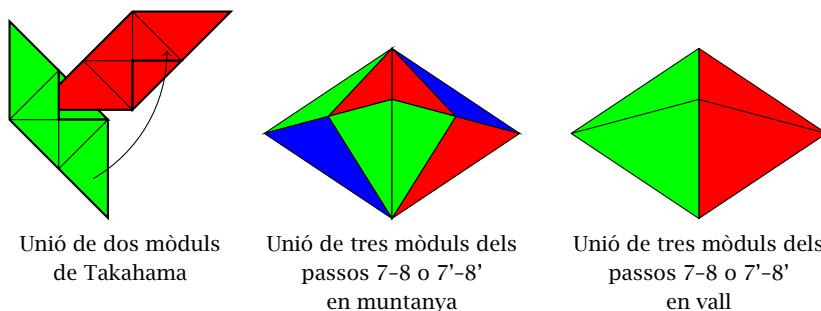
Unió de sis mòduls del pas 7 o 7' en vall

3.1 La joia de Takahama

Fent un nou plec en el mòdul de Sonobe s'obté una variant que en aquesta secció anomenaré *mòdul de Takahama*.



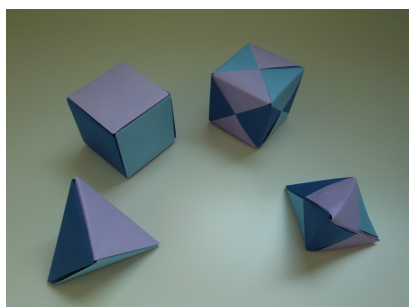
Unint tres mòduls de Takahama obtenim un altre hexàedre: la bipiràmide triangular. La unió de dos mòduls de Takahama es fa com en el cas del mòdul de Sonobe. Les altres propietats del mòdul de Takahama són semblants a les del mòdul de Sonobe. El mòdul obtingut en el pas 8 no es pot encaixar de manera natural amb el mòdul del pas 8'. Per construir una bipiràmide triangular cal fer tres mòduls idèntics com en el pas 8, o tres mòduls idèntics com en el pas 8'; en els dos casos l'efecte visual és el mateix. Si en els passos 7-8 o 7'-8' fem plects en vall en lloc de muntanya, aleshores, quan unim tres mòduls, obtenim una bipiràmide triangular amb les cares llises no dividides en triangles.



Nota històrica: segons l'historiador de l'origami David Lister (Grimsby, 1930–2013), la joia de Takahama fou publicada per primer cop l'any 1974 en el llibre *Vida creativa amb origami creatiu* [17], escrit en japonès per l'origamista nipona Toshie Takahama (Tòquio, 1910–1999). El nom de *joia* és degut al fet que Toshie Takahama feia collarets unint uns quants d'aquests hexaedres amb una corda. A finals de la dècada dels anys seixanta, Toshie Takahama va fundar el Sosaku Origami Group 67 (grup de creació o d'estudi de l'origami), del qual formaven part, entre d'altres, Mitsunobu Sonobe i Kunihiro Kasahara. Aquest petit grup de plegadors es reunia periòdicament a l'escola Tamagawa Gakuen, a l'oest de Tòquio.

David Lister també afirma que el cub de Sonobe fou publicat per primer cop l'any 1968 a les pàgines 10 i 11 de la segona de les set revistes editades pel Sosaku Origami Group 67.

Amb les publicacions de Toshie Takahama es va donar a conèixer el mòdul de Sonobe. Així, el cub de Sonobe i la joia de Takahama van ser les figures modulars que van donar lloc a l'actual especialitat de l'origami modular. El cub de Sonobe es va publicar posteriorment en diverses revistes i llibres de papiroflèxia amb el nom de *caixa de colors*, com per exemple en la pàgina 19 del número 0, volum 3, del butlletí de la NOA (Nippon Origami Association), de l'any 1974, del qual era directora Toshie Takahama.



Cubs de Sonobe i joies de Takahama

Toshie Takahama i Mitsunobu Sonobe

Mitsunobu Sonobe (園部 光伸) va néixer l'any 1937. En el llibre *Atarashii Origami Nyumon* [15], editat pel Sosaku Origami Group 67 l'any 1970, en el qual apareix publicada la caixa de colors, podem llegir que tenia sis anys d'experiència en el plegatge de paper i que vivia al barri d'Ikebukuro, en el districte de Toshima-ku de la ciutat de Tòquio. Treballava en un grup de teatre i el que més li agradava era la creació de tot tipus de flors de paper. En el mateix llibre es fan petits apunts biogràfics dels altres membres del Sosaku Origami Group 67.

Als anys setanta, Toshie Takahama era més coneguda que Mitsunobu Sonobe i durant algunes dècades el mòdul de Sonobe va ser conegut a Occident com a *mòdul de Takahama*, però és clar que l'autor d'aquest mòdul és Mitsunobu Sonobe, com apareix en el llibre *Papiroflexia para expertos* [6], dels mestres d'origami Kunihiro Kasahara (笠原 邦彦) i Toshie Takahama (高濱 利恵), contemporanis de Mitsunobu Sonobe.

Cal destacar la semblança entre el cub de Sonobe i el cub de paper anomenat *tamatebako* o *cofre del tresor*, que apareix en una il·lustració del llibre *Ranma Zushiki*, publicat l'any 1734 per Hayato Ohoka.

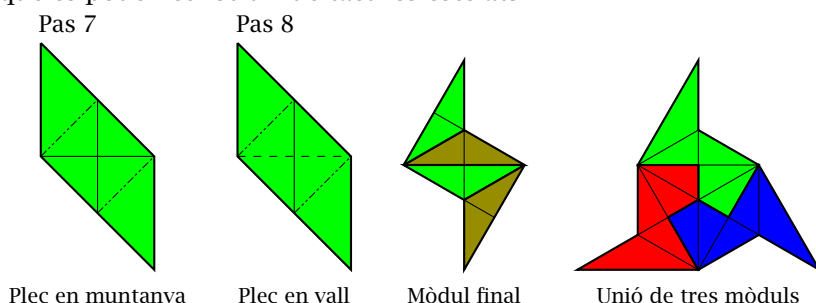
Podeu trobar un altre cub de paper força diferent del de Sonobe en el llibre *Guía práctica del arte manual* [3], publicat l'any 1977, tot i que les instruccions de la seva construcció no són gaire clares.

3.2 Deltaedres estelats

Els deltaedres són poliedres totes les cares dels quals són triangles equilàters. Existeixen infinits deltaedres còncaus i tan sols vuit deltaedres convexos de 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 i 20 cares, com van demostrar l'any 1947 Freudenthal i Van der Waerden [4]. Els valors mínim i màxim del nombre de cares d'un deltaedre

convex és 4 i 20, respectivament, que es corresponen als sòlids platònics o regulars amb els valors mínim i màxim de cares: el tetràedre i l'icosàedre. Existeix un tercer poliedre, l'octàedre, que és deltaedre i sòlid platònic alhora. L'octàedre també es pot interpretar com una bipiràmide quadrangular. Els altres cinc deltaedres (les bipiràmides triangular i pentagonal, el dodecadeltaedre, el tetracaidecadeltaedre i l'hexacaidecadeltaedre) no són regulars en els seus vèrtexs. Cal destacar que no existeixen deltaedres convexos de 18 cares o d'un nombre de cares superior a 20.

El mòdul de Sonobe té moltes més possibilitats. Si en el pas 7 fem el plec en muntanya i en el pas 8 fem el plec en vall, aleshores obtenim un nou mòdul amb què es poden construir deltaedres estelats.

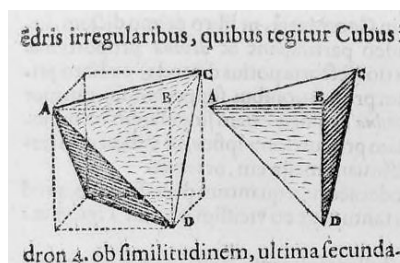


Unint tres d'aquests mòduls obtenim una piràmide triangular oberta en què la base és un triangle equilàter i els tres costats laterals són triangles rectangles isòsceles. Amb aquestes noves configuracions de segon nivell podem fer estelacions de deltaedres. Amb vuit piràmides obtenim un octàedre estelat, i amb vint, un icosàedre estelat. Com que cada mòdul forma part de dues piràmides adjuntes, observem que es necessiten dotze mòduls per fer l'octàedre estelat i trenta mòduls per fer l'icosàedre estelat. En general, si tenim un deltaedre de C cares i volem fer un deltaedre estelat, ens calen

$$\frac{3C}{2}$$

mòduls; d'aquest raonament origàmic deduïm que qualsevol deltaedre té sempre un nombre parell de cares.

Observem que, si fem l'estelació del tetràedre amb aquest tipus de configuració de segon nivell, obtenim el cub de Sonobe. Això és així perquè es pot inscriure un tetràedre dins d'un cub; les sis arestes del tetràedre coincideixen amb sis de les dotze diagonals del cub. Aquest fet ja fou observat per Kepler en l'*Harmonices Mundi* (1619).



Kepler. *Harmonices Mundi*, llibre v



Segell amb un octàedre estelat

De la il·lustració del llibre de Kepler deduïm que la longitud de l'aresta del cub l coincideix amb la distància entre dues arestes oposades del tetràedre, i la longitud de l'aresta del tetràedre regular inscrit val $\sqrt{2}l$. A més, la descomposició del cub en cinc tetràedres ens permet calcular el volum del tetràedre regular.

$$l^3 = V_{\text{cub}} = V_{\text{tetràedre regular}} + 4 \cdot V_{\text{tetràedres no regulars}},$$

$$l^3 = V_{\text{tetràedre regular}} + 4 \cdot \frac{1}{6}l^3,$$

$$V_{\text{tetràedre regular}} = \frac{l^3}{3}.$$

Observem que el volum del tetràedre regular és el doble que el volum del tetràedre rectangle.

L'estelació de l'octàedre apareix en un segell que es va emetre al Japó per commemorar la celebració a Kyoto, l'any 1990, del XXI Congrés Internacional de Matemàtiques.

Els deltaedres estelats construïts amb aquest mòdul tenen les cares triangulades. Si invertim el tipus de plecs en el pas 7 (vall en lloc de muntanya) i el pas 8 (muntanya en lloc de vall), aleshores obtindrem els deltaedres estelats amb les cares llises.

Pas 7	Pas 8	Políedre
Plec en muntanya		Cub de Sonobe amb cares triangulades
Plec en vall		Cub de Sonobe amb cares llises
Plec en muntanya	Plec en muntanya	Joia de Takahama amb cares triangulades
Plec en vall	Plec en vall	Joia de Takahama amb cares llises
Plec en muntanya	Plec en vall	Deltaedres estelats amb cares triangulades
Plec en vall	Plec en muntanya	Deltaedres estelats amb cares llises

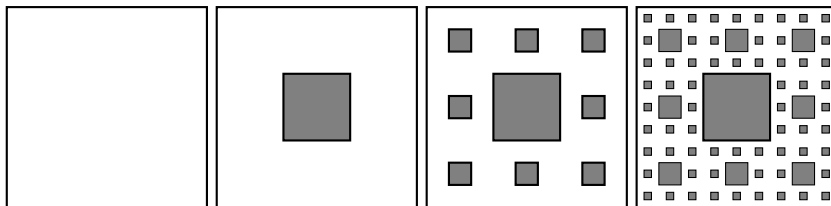
3.3 El cub de Sonobe i els fractals

L'esponja de Menger és un fractal descrit per primer cop pel matemàtic austríac Karl Menger (1902–1985). La descripció d'aquest fractal, que denotarem amb M_∞ , comença amb un cub M_0 de costat L . Dividim aquest cub en vint-i-set cubs iguals de costat $L/3$ i eliminem el cub central i els sis cubs centrals de cada cara. Aquesta nova figura M_1 té vint dels vint-i-set cubs inicials. Ara iterem infinitament el procés per cadascun dels cubs. Observem que en cada iteració cada cub es transforma en vint cubs i, per tant, l'enèsima iteració M_n està formada per la unió connexa de $K_n = 20^n$ cubs de costat $L/3^n$. D'aquesta manera tenim una successió de varietats topològiques. Definim l'esponja de Menger, que denotarem amb M_∞ , com la intersecció de totes aquestes varietats topològiques.

$$M_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k \subsetneq \cdots \subsetneq M_n \subsetneq M_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq M_1 \subsetneq M_0.$$

De fet, l'esponja de Menger és una generalització a $\mathbb{R}^3$ de la catifa de Sierpinski ($\mathbb{R}^2$)

$$S_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k \subsetneq \cdots \subsetneq S_n \subsetneq S_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq S_1 \subsetneq S_0$$



i del conjunt o pols de Cantor ($\mathbb{R}^1$),

$$C_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k \subsetneq \cdots \subsetneq C_n \subsetneq C_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq C_1 \subsetneq C_0$$



Aquests i d'altres fractals van ser estudiats amb profunditat al segle xx; per exemple, les seves dimensions de Hausdorff són, respectivament:

$$\log 20 / \log 3 \approx 2.727, \quad \log 8 / \log 3 \approx 1.8927, \quad \log 2 / \log 3 \approx 0.631.$$

El mòdul de Sonobe ens permet construir i entendre algunes propietats d'aquesta successió de superfícies. El cub inicial M_0 es pot fer amb $C_0 = 6$ mòduls de Sonobe; aquest cub té $V_0 = 8$ vèrtexs i $A_0 = 12$ arestes, la seva característica d'Euler-Poincaré val $\chi_0 = C_0 - V_0 + A_0 = 6 - 8 + 12 = 2$ i el seu gènere és $g_0 = (2 - \chi_0)/2 = 0$.

A continuació veurem quants mòduls de Sonobe són necessaris per construir la iteració enèsima de l'esponja de Menger M_n .

Inicialment tenim $K_0 = 1$ cub de costat L . En fer la primera iteració de l'esponja de Menger dividim cada aresta en tres parts iguals, així cada aresta aportarà dos nous vèrtexs.

En la primera iteració de l'esponja de Menger observem que cada cara quadrada de costat L del cub inicial es transforma en vuit noves cares quadrades de longitud $L/3$; a aquestes noves cares cal afegir quatre cares centrals interiors per cada cara del cub inicial. Així doncs, la primera iteració de l'esponja de Menger M_1 es pot fer amb $C_1 = 24 + 8C_0 = 72$ mòduls de Sonobe. El nombre d'arestes és el doble del nombre de cares $A_1 = 4C_1/2 = 144$. Per calcular el nombre de vèrtexs V_1 observem que cada aresta A_0 es divideix en tres parts iguals i, per tant, cada aresta aportarà dos vèrtexs en la iteració, als quals cal afegir els vèrtexs V_0 del cub inicial, així com els nous vèrtexs que apareixen a la part central del cub, quatre per cada cara inicial i vuit més al centre del cub $V_1 = V_0 + 2A_0 + 4C_0 + 8 = 64$; així doncs, $\chi_1 = C_1 - A_1 + V_1 = 72 - 144 + 64 = -8$ i, per tant, el seu gènere és $g_1 = (2 - \chi)/2 = 5$.

De fet, aquest argument és vàlid per a qualsevol iteració i ens proporciona fórmules recursives per calcular els valors del nombre de cares, arestes, vèrtexs, característica d'Euler i gènere de la superfície de cada iteració M_n .

Nombre de cares	$C_n = 8C_{n-1} + 24K_{n-1}$
Nombre d'arestes	$A_n = 2C_n$
Nombre de vèrtexs	$V_n = V_{n-1} + 2A_{n-1} + 2^2C_{n-1} + 2^3K_{n-1} + 8(20^{n-1} - 8^{n-1})$
Característica d'Euler	$\chi_n = V_n - A_n + C_n$
Gènere de la superfície	$g_n = (2 - \chi_n)/2$

Utilitzant les recurrències anteriors, i avaluant polinomis ciclotòmics en dues variables, es podem demostrar per inducció les següents fórmules que donen els valors exactes en funció de n :

Nombre de cares	$C_n = 4 \cdot 8^n + 2 \cdot 20^n$
Nombre d'arestes	$A_n = 8 \cdot 8^n + 4 \cdot 20^n$
Nombre de vèrtexs	$V_n = 8 + 24 \cdot \frac{8^n - 1}{7} + 32 \cdot \frac{20^n - 1}{19}$
Característica d'Euler	$\chi_n = 8 + 24 \cdot \frac{8^n - 1}{7} + 32 \cdot \frac{20^n - 1}{19} - 4 \cdot 8^n - 2 \cdot 20^n$
Gènere de la superfície	$g_n = 2 \cdot \frac{8^n - 1}{7} + 3 \cdot \frac{20^n - 1}{19}$

Per tant, els valors del nombre de mòduls de Sonobe necessaris per construir l'enèsima iteració de l'esponja de Menger i el gènere de la superfície venen donats per les successions

$$\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{6, 72, 1056, 18048, 336384, 6531072, \dots, \infty\},$$

$$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{0, 5, 81, 1409, 26433, 514625, \dots, \infty\}.$$

Prenent límit quan n tendeix a ∞ , deduïm que l'esponja de Menger M_∞ té una superfície d'àrea infinita amb volum 0.

$$\text{Àrea}(M_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{3^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n + 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n = \infty,$$

$$\text{Volum}(M_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n}{3^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n = 0.$$

Aplicant el teorema de Ringel-Youngs [11], veiem que el nombre mínim de colors (nombre cromàtic) necessaris per acolorir la superfície donada per l'enèsima iteració de l'esponja de Menger sense que dues cares adjacents tinguin el

mateix color ve donat per la fórmula següent, conjecturada per Heawood el 1891, que tan sols depèn del gènere de la superfície

$$H(g_n) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g_n}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48 \left(2 \cdot \frac{8^n - 1}{7} + 3 \cdot \frac{20^n - 1}{19} \right)}}{2} \right\rceil.$$

Els primers valors d'aquesta successió de nombres cromàtics són:

$$\{H(g_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{4, 11, 34, 133, 566, 2488, 11056, 49323, 220373, 985176, \dots, \infty\}.$$

3.4 Cubs de paper i cubs aritmètics

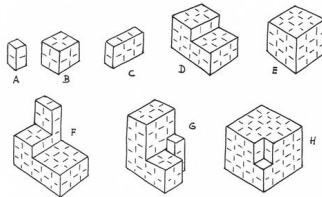
Juan Manuel Gimeno Viguera, erudit de la papiroflèxia, va proposar l'any 1992 un trencaclosques geomètric-papiroflèctic inspirat en la igualtat

$$6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3.$$

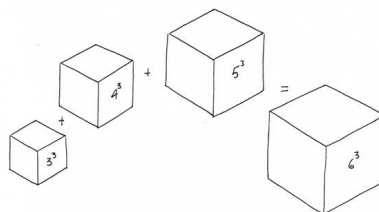
Aquest joc consistia en la construcció de vuit peces fetes amb el mòdul de Sonobe-Takahama, que calia reordenar per aconseguir els quatre cubs.

Los cubos disjuntivos

- Usando los módulos de 90° de Takahama, construir las siguientes piezas:



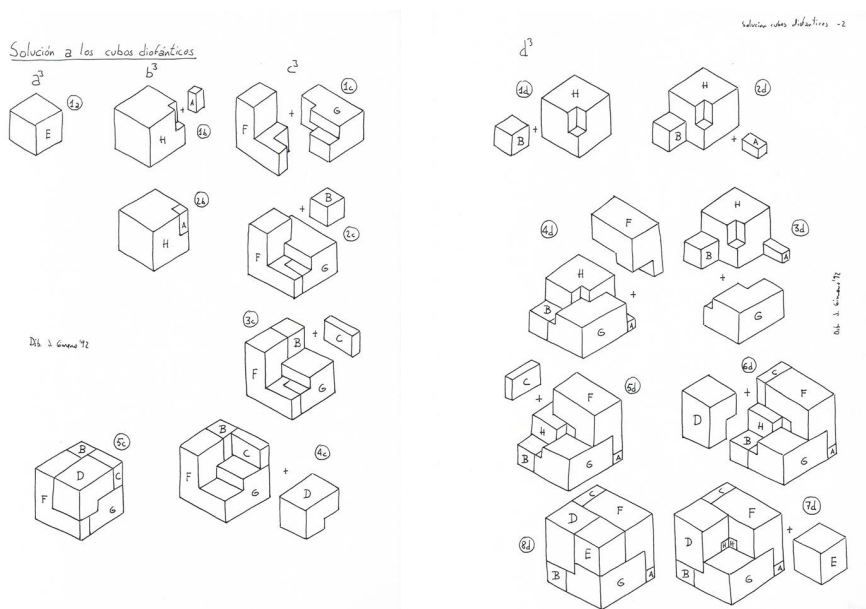
- Hacer con todas las piezas tres cubos (3^3 , 4^3 , 5^3) de tal manera que todas juntas formen otro cubo (6^3) que demuestren que $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$



Una segona igualtat amb cubs ben coneguda és l'exemple de Srinivasa Ramanujan, que expressa el nombre 1729 de dues formes diferents com a la suma de dos cubs

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

Aquesta igualtat i el Taxi Cab que la va inspirar apareixen en la pel·lícula biogràfica *L'home que coneixia l'infinit*, 2015.



Però com es poden deduir aquestes o altres igualtats amb nombres naturals? Observem que les igualtats numèriques anteriors són solucions enteres de la superfície cúbica

$$F: x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0. \quad (5)$$

L'estudi profund de les superfícies cúbiques comença l'any 1849, quan Arthur Cayley demostra que tota superfície cúbica llisa sobre el cos $\mathbb{C}$ té un nombre finit de rectes i el mateix any George Salmon precisa que el nombre de rectes és exactament 27. Cal destacar també els treballs d'Alfred Clebsch, que el 1871 descobreix una superfície cúbica que conté 27 rectes reals. Aquesta superfície cúbica es pot expressar amb l'equació

$$(x + y + z + w)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + w^3.$$

Observem que les 27 rectes de la superfície (5) venen donades per les equacions

$$\begin{aligned} L_{i,j} &= \{x + \xi^i y = 0, z + \xi^j w = 0\}, \\ L'_{i,j} &= \{x + \xi^i z = 0, y + \xi^j w = 0\}, \\ L''_{i,j} &= \{x + \xi^i w = 0, y + \xi^j z = 0\}, \end{aligned} \quad (6)$$

on ξ és una arrel primitiva cúbica de la unitat i els índexs $\{i, j\}$ prenen els valors $\{0, 1, 2\}$. Tres d'aquestes rectes ($i = j = 0$) tenen coeficients en el cos dels nombres racionals $\mathbb{Q}$ i les altres 24 rectes ($i \neq 0$ o $j \neq 0$) tenen coeficients en el cos $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Es poden obtenir parametritzacions de la superfície (5) triant dues rectes que no es tallin d'aquesta col·lecció de 27 rectes (6).

Noam Elkies i Irene Polo-Blanco van trobar, respectivament, les parametritzacions següents:

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \mathbb{P}^2 &\longrightarrow F \\ (r:s:t) &\longrightarrow \begin{aligned} &-(s+r)t^2 + (s^2 + 2r^2)t - s^3 + rs^2 - 2r^2s - r^3 : \\ &t^3 - (s+r)t^2 + (s^2 + 2r^2)t + rs^2 - 2r^2s + r^3 : \\ &-t^3 + (s+r)t^2 - (s^2 + 2r^2)t + 2rs^2 - r^2s + 2r^3 : \\ &(s-2r)t^2 + (r^2 - s^2)t + s^3 - rs^2 + 2r^2s - 2r^3, \end{aligned} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Psi: \quad \mathbb{P}^2 &\longrightarrow F \\ (r:s:t) &\longrightarrow \begin{aligned} &(-r^3 - 2r^2t + 3r^2s + 12rst - 3rs^2 - 4rt^2 + 6s^2t + 12st^2 + 9s^3 : \\ &r^3 + 2r^2t + 3r^2s + 12rst + 3rs^2 + 4rt^2 - 6s^2t + 12st^2 + 9s^3 : \\ &-8t^3 - 8rt^2 - 9s^3 - r^3 - 3r^2s - 3rs^2 - 4r^2t - 12s^2t : \\ &8t^3 + 8rt^2 - 9s^3 + r^3 - 3r^2s + 3rs^2 + 4r^2t + 12s^2t). \end{aligned} \end{aligned}$$

De fet, existeixen transformacions lineals f, g que fan que aquestes dues parametritzacions siguin equivalents:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\Phi} & F \\ f \downarrow & & \uparrow g \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\Psi} & F \end{array} \quad g \circ \Psi \circ f = \Phi,$$

on

$$f: \quad \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \quad (r:s:t) \longrightarrow (2s-r:-r:t-s) \quad \text{i} \quad g: \quad F \longrightarrow F \quad (w:x:y:z) \longrightarrow (w:z:y:x).$$

Donant valors als paràmetres $(r:s:t)$ en (7), podem obtenir noves relacions numèriques entre cubs de nombres naturals:

$$\begin{aligned} r=1 \quad s=1 \quad t=1: & \quad 6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3, \\ r=1 \quad s=-1 \quad t=1: & \quad 9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3, \\ r=1 \quad s=2 \quad t=3: & \quad 19^3 = 18^3 + 10^3 + 3^3, \\ r=2 \quad s=1 \quad t=2: & \quad 16^3 + 2^3 = 15^3 + 9^3, \\ r=3 \quad s=1 \quad t=3: & \quad 60^3 + 3^3 = 59^3 + 22^3, \\ r=3 \quad s=2 \quad t=3: & \quad 51^3 + 12^3 = 43^3 + 38^3. \end{aligned}$$

L'exemple de Ramanujan es pot obtenir amb els següents valors dels paràmetres

$$r = -\frac{2}{\sqrt[3]{21}} \quad s = \frac{1}{\sqrt[3]{21}} \quad t = -\frac{6}{\sqrt[3]{21}}: \quad 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

En el jardí matemàtic, ubicat entre els edificis Torretamarit i Torrepinet del campus de la Universitat Miguel Hernández d'Elx, podeu veure una escultura de 3 metres d'altura feta amb pedra natural de la superfície cúbica $w(x+y+z)^2 + xyz = 0$. Aquesta superfície té quinze rectes i un únic punt

singular $(0 : 0 : 0 : 1)$. L'escultura fou realitzada l'any 2009 per l'escultor murcià Cayetano Ramírez López i és coneguda popularment com a *Damatemàtica* per la seva semblança amb la Dama d'Elx. Aquest escultor va restaurar l'any 2005 la col·lecció de superfícies cúbiques de la Universitat de Groningen; en particular, va fer amb escaiola i amb resina la superfície cúbica de Cayley definida per l'equació $xyz + yzw + zwx + wxy = 0$. La cúbica de Cayley té nou rectes i quatre punts singulars, que és el màxim nombre de punts singulars que pot tenir una superfície cúbica. També va fer uns models en polièster de la superfície de Clebsch, on es poden veure clarament les 27 rectes reals, i d'altres superfícies cúbiques que van ser exposades en el XXV Congrés Internacional de Matemàtiques, celebrat a Madrid l'any 2006, el mateix congrés en què el matemàtic rus Grigori Perelman va rebutjar la medalla Fields. Posteriorment es va fer una exposició itinerant sota el títol *Art i matemàtiques* amb aquestes escultures sobre superfícies cúbiques i altres escultures, com una ampolla de Klein, un nàutil basat en la proporció àuria, alguns cargols amb formes espirals i un romanesc per il·lustrar el concepte de fractal.



Damatemàtica



Cúbica de Clebsch

Dues escultures de Cayetano Ramírez

Actualment les escultures de les superfícies cúbiques de Cayetano Ramírez es troben en el Museu Didàctic i Interactiu de Ciències del Baix Segura (MUDIC, <http://www.mudic.es>) ubicat a l'Escola Politècnica Superior d'Oriola de la Universitat Miguel Hernández (Elx) i dirigit per la matemàtica Carmen Perea.

Fins ara hem vist que existeixen infinits cubs naturals que es poden descompondre com a suma de tres cubs naturals no nuls. Aquesta afirmació s'il·lustrava amb un trencaclosques que utilitzava el mòdul de Sonobe. En canvi, no podem fer un trencaclosques semblant amb aquest mòdul per descompondre un cub com a suma de dos cubs. En efecte, com va dir Pierre de Fermat el 1635:

Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Aquesta és possiblement la frase més famosa de les matemàtiques i actualment es coneix com a *darrer teorema de Fermat*.

Durant 359 anys els matemàtics van intentar demostrar sense èxit aquesta afirmació que Pierre de Fermat (Bèumont de Lomanha, 1601 - Castres, 1665) va fer el 1635. El cas $n = 4$ es pot demostrar amb la tècnica del descens infinit; així doncs, per demostrar el darrer teorema de Fermat és suficient estudiar el cas $n = p$ nombre primer i, a més, podem suposar que x, y, z són nombres naturals, no nuls i dos a dos coprims entre si.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad x^p + y^p \neq z^p, \quad p \geq 3.$$

Dels nombrosos articles dedicats a aquest teorema, cal destacar el treball de la matemàtica francesa Sophie Germain, que en una carta dirigida a Gauss i amb data 12 de maig de 1819 intenta fer una demostració general per a tots els exponents del darrer teorema de Fermat. Les tècniques de Sophie Germain van permetre demostrar el teorema per a tots els nombres primers $p < 100$ i dividir el darrer teorema de Fermat en dos casos: $p \nmid xyz$ (cas 1) i $p \mid xyz$ (cas 2).

A principis del segle xx els treballs de Dmitri Mirimànov (1905) i d'Arthur Wieferich (1909) redueixen el cas 1 a trobar les solucions de la congruència:

$$2^p \equiv 2 \pmod{p^2}.$$

De fet, tan sols es coneixen dues solucions $p = 1093$ (Meisner, 1913) i $p = 3511$ (Beeger, 1921) de la congruència de Wieferich per a $p < 4 \cdot 10^{12}$. Per tant, el cas 1 del darrer teorema de Fermat és cert per a gairebé tot primer $p < 4 \cdot 10^{12}$.

Però la demostració definitiva del darrer teorema de Fermat comença l'any 1986 amb el treball de Gerhard Frey, que associa a una possible solució $a^p + b^p = c^p$ amb nombres enters no nuls de l'equació de Fermat, la corba el·líptica

$$y^2 = x(x - a^p)(x + b^p).$$

Estudiant les seves propietats, Frey demostra que aquesta corba el·líptica no pot ser modular, en contra de la conjectura de Shimura-Taniyama-Weil: tota corba el·líptica és modular. El cercle es va tancar el dia de la revetlla de Sant Joan de l'any 1993 en el Sir Isaac Newton Institute de la Cambridge University, quan Andrew Wiles va finalitzar tres conferències en dies consecutius sota el títol *Modular forms, elliptic curves and Galois representations* afirmant haver demostrat la conjectura de Shimura-Taniyama-Weil i, com a corollari, el darrer teorema de Fermat. Al cap de poc temps els experts van trobar un forat en la demostració, que va ser resolta pel mateix Wiles i el seu deixeble Richard Taylor. Finalment, la demostració rigorosa fou publicada pels dos autors el maig de 1995 en els *Annals of Mathematics*. El treball de Wiles es redueix a estudiar els punts de 3-torsió i de 5-torsió d'una corba el·líptica. Posteriorment, Noam Elkies va fer una simplificació de la demostració i va provar que pel darrer teorema de Fermat no calia estudiar els punts de 5-torsió.

A continuació veurem una demostració elemental del darrer teorema de Fermat per al cas 1 de l'exponent $p = 3$.

PROPOSICIÓ 9. *Siguin $x, y, z \in \mathbb{N}$ no nuls tals que $x^3 + y^3 = z^3$. Aleshores, $3 \mid xyz$.*

PROVA. Siguin x, y, z tres nombres naturals, no nuls, 2 a 2 coprimers i no divisibles per 3 que compleixen l'equació de Fermat per a $p = 3$.

$$x^3 + y^3 = z^3, \quad x, y, z \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad 3 \nmid xyz. \quad (8)$$

La suma de dos cubs $x^3 + y^3$ es pot descompondre com el producte $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ de dos factors. Aquests factors no són divisibles per 3 perquè el seu producte val z^3 , que no és divisible per 3. A més, també són coprimers, en efecte, $\text{mcd}(x + y, x^2 - xy + y^2) = \text{mcd}(x + y, 3xy) = 1$; per tant, es poden expressar com a potències cúbiques. Un raonament anàleg es pot aplicar per a les diferències de dos cubs $z^3 - x^3$ i $z^3 - y^3$.

$$\begin{aligned} x + y &= z_1^3, & x^2 - xy + y^2 &= z_2^3, & z_1 z_2 &= z, \\ z - x &= y_1^3, & z^2 + zx + x^2 &= y_2^3, & y_1 y_2 &= y, \\ z - y &= x_1^3, & z^2 + zy + y^2 &= x_2^3, & x_1 x_2 &= x. \end{aligned}$$

Ara tenim sis nous valors no nuls $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ que són 2 a 2 coprimers i no divisibles per 3. De fet, els valors (x_2, y_2, z_2) no intervenen en la resta de la demostració.

De les tres primeres equacions lineals podem aïllar els valors x, y, z en funció de x_1, y_1, z_1

$$x = \frac{z_1^3 - y_1^3 + x_1^3}{2}, \quad y = \frac{z_1^3 - x_1^3 + y_1^3}{2}, \quad z = \frac{z_1^3 + x_1^3 + y_1^3}{2}.$$

Substituïm aquestes combinacions lineals de cubs en l'expressió (8) i multipliquem per 8,

$$(z_1^3 - y_1^3 + x_1^3)^3 + (z_1^3 - x_1^3 + y_1^3)^3 = (z_1^3 + x_1^3 + y_1^3)^3.$$

Desenvolupant els cubs obtenim:

$$(z_1^3 - x_1^3 - y_1^3)^3 = 24x_1^3 y_1^3 z_1^3.$$

D'aquesta darrera igualtat es dedueix la contradicció que 3 és un cub perfecte al conjunt dels nombres racionals:

$$3 = \left(\frac{z_1^3 - x_1^3 - y_1^3}{2x_1 y_1 z_1} \right)^3 \in \mathbb{Q}.$$

□

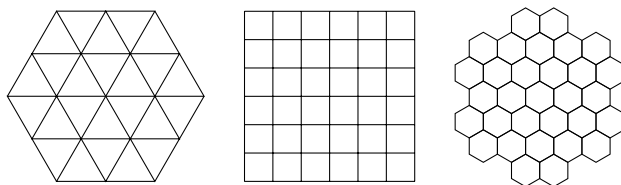
A la localitat occitana de Bèumont de Lomanha podeu visitar la casa natal de Fermat, avui convertida en museu, així com un monument de l'illustre matemàtic al costat d'un preciós mercat cobert de fusta del segle xv. Aquesta petita població està situada a uns 60 km al nord-oest de Tolosa de Llenguadoc, on Fermat treballava com a advocat.

4 Mosaics de paper

Els diferents motius dels mosaics de l'Alhambra de Granada són des de fa temps una font d'inspiració per a la creació artística i matemàtica. En aquest palau de la dinastia nassarita, construït entre els segles XIII i XV, es poden contemplar diferents motius geomètrics. Alguns d'aquests motius es coneixen amb un nom propi: ocellet nassarita, os nassarita, avió nassarita o ratpenat nassarita.

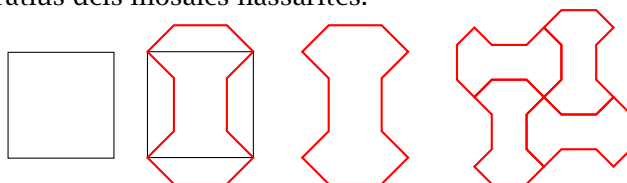
Però què és un mosaic? La seva etimologia ens diu que aquesta paraula prové del llatí *mosaicum opus*, és a dir, una obra de les muses. Antigues civilitzacions com la grega o la romana ja feien aquestes composicions decoratives amb petites peces de diferents colors i materials anomenades *tessel·les*. Molts d'aquests antics mosaics i altres de més moderns, com els que es poden veure en les obres modernistes d'Antoni Gaudí, tot i la seva bellesa, no tenen cap tipus de simetria. També existeixen mosaics que mostren simetries, com els mosaics de les voreres del passeig de Gràcia de Barcelona, fets amb rajoles hexagonals, o els mosaics del pati d'entrada de l'Institut d'Estudis Catalans, elaborats amb rajoles catalanes. Des d'un punt de vista matemàtic, definirem un mosaic o tessellació com una divisió del pla sense encavalcaments ni buits mitjançant una o més formes geomètriques, també anomenades *tessel·les*. Per estudiar els mosaics respondrem les preguntes següents: Quins són els mosaics més simples? Com podem crear nous mosaics? Quants mosaics essencialment diferents existeixen? Com podem classificar els mosaics?

Els mosaics més simples, que anomenarem *regulars*, s'aconsegueixen prenent com a tessella bàsica tres tipus de polígons regulars: el triangle equilàter, el quadrat i l'hexàgon regular. Els mosaics regulars tenen simetries centrals o rotacionals de 60, 90 i 120 graus, respectivament, així com diferents tipus de simetries axials, en què els eixos de simetria formen entre si angles de 30, 45 i 60 graus, respectivament.



Mosaics regulars

Es poden fer nous mosaics modificant els mosaics regulars. Aquesta observació va ser desenvolupada en les obres de l'artista neerlandès Maurits Cornelius Escher en quedar impressionat en la seva visita a l'Alhambra, l'any 1936, pels motius decoratius dels mosaics nassarites.



Quadrat

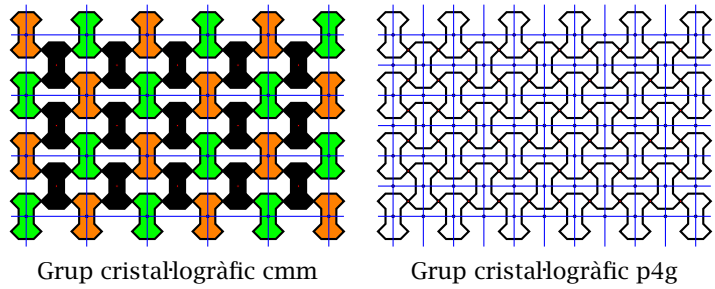
Os nassarita

La tessella os nassarita es pot aconseguir a partir d'un quadrat. En dos costats oposats d'un quadrat seccionem un trapezi que tingui per base major el costat del quadrat, per alçària la quarta part de la longitud del costat del quadrat i angles interns de 45, 135, 135 i 45 graus. Unim per la part exterior del quadrat la base major d'aquests trapezis als altres dos costats del quadrat, com es mostra en la figura anterior.

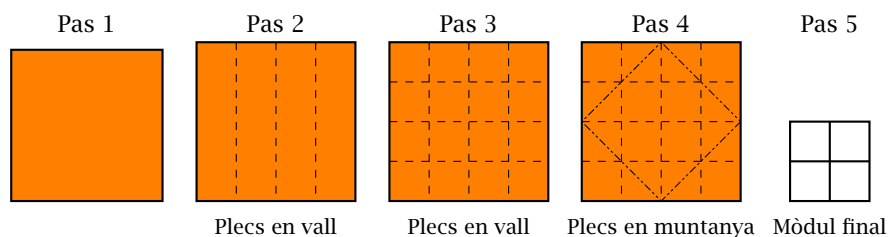
El teorema de Fedorov (1891) ens diu que tan sols existeixen disset tipus de mosaics essencialment diferents [5]. Els diferents tipus de mosaics venen descrits per disset grups de simetries. Aquests grups també es coneixen amb el nom de *grups cristal·logràfics plans*, perquè Fedorov els va trobar estudiant la forma en què cristal·litzen a la natura els minerals. Existeixen diferents notacions equivalents per classificar els grups cristal·logràfics plans: Pólya, Conway, Fejes Thót-Cadwell, Niggli, Speiser, Shubinov-Koptsik, Wells-Bell, internacional llarga, etc. En la taula següent s'utilitza la notació internacional curta.

Angle mínim de rotació	Existeix alguna reflexió?				
	Sí		No		
$360^{\circ}/6=60^{\circ}$	p6m		p6		
$360^{\circ}/4=90^0$	Tots els centres de rotació estan sobre els eixos de reflexió?		p4		
	Sí: p4m	No: p4g			
$360^{\circ}/3=120^{\circ}$	Tots els centres de rotació estan sobre els eixos de reflexió?		p3		
	Sí: p31m	No: p3m1			
$360^{\circ}/2=180^{\circ}$	Existeixen reflexions amb eixos perpendiculars?		Existeix alguna reflexió amb lliscament?		
	Sí		No	Sí: pgg	No: p2
	Tots els centres de rotació estan sobre els eixos de reflexió?		pmg		
	Sí: cmm	No: pmm			
$360^{\circ}/1=0^{\circ}$	Existeix alguna reflexió amb lliscament amb eix diferent d'un eix de reflexió?		Existeix alguna reflexió amb lliscament?		
	Sí: cm	No: pm	Sí: pg	No: p1	

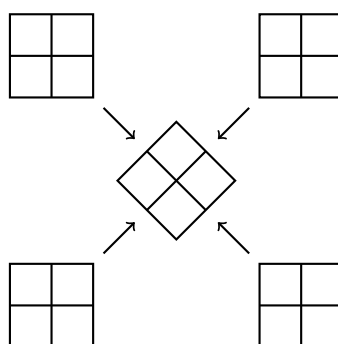
A l'Alhambra de Granada hi ha catorze dels disset tipus de mosaics si es tenen en compte els colors [9] i tots disset si no es tenen en compte els colors [8].



A continuació es descriu un mòdul de paper que permet fer mosaics. Aquest mòdul i les seves variants es coneixen amb el nom de *variacions Froebel*, pel fet que va ser utilitzat al segle XIX passat pel pedagog alemany Frederic Fröbel en les escoles Kindergarten (jardins d'infància).

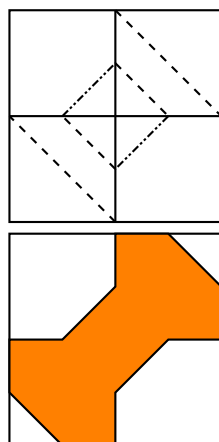


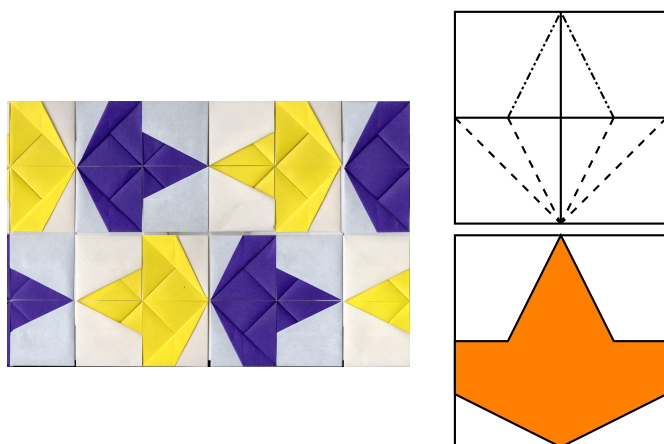
Per aconseguir diferents tipus de motius és necessari utilitzar un paper bi-color, com per exemple el paper de tipus kami (blanc/color). En el pas 1 comencem amb la cara de color al davant i la de color blanc al darrere; en el pas 2 pleguem verticalment en vall el paper per la meitat i per la quarta part; en el pas 3 fem el mateix que en el pas 2 però horitzontalment; en el pas 4 pleguem en muntanya els quatre vèrtexs del quadrat cap al centre, i en el pas 5 obtenim el mòdul final col·lapsant els quatre costats del quadrat cap a l'interior.



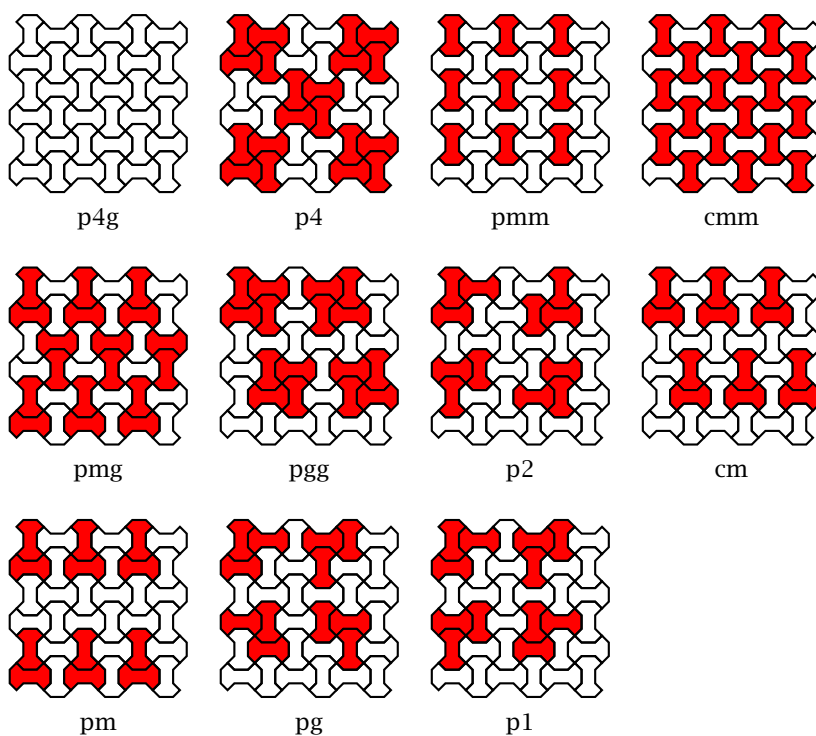
Unió de cinc mòduls

Per aconseguir els motius os nassarita i avió nassarita cal fer els següents plecs en el mòdul final.



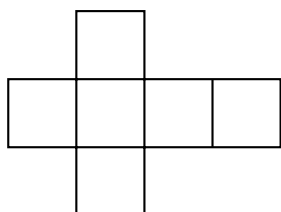


Combinant els colors en els mosaics fets amb la tessella de l'os nassarita es poden aconseguir onze de les disset configuracions dels grups cristal·logràfics.

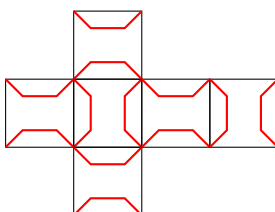


És clar que el desenvolupament pla del cub té sis quadrats. Vist a l'inrevés es pot pensar que el cub és un mosaic tridimensional format per sis tesselles quadrades. D'aquesta manera podem construir diferents tipus de mosaics

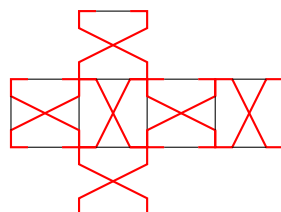
cúbics fent modificacions en el quadrat llis inicial. Per exemple, si considerem sis tesselles de l'os nassarita o de l'avió nassarita, es pot fer un mosaic cúbic tridimensional amb cadascun d'aquests motius.



Desenvolupament del cub

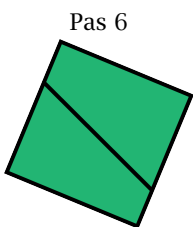
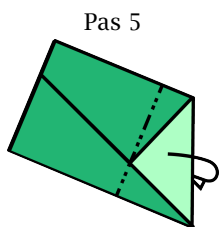
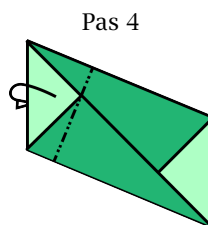
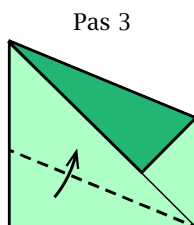
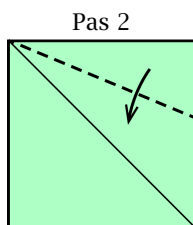
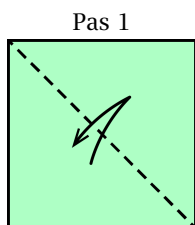


Desenvolupament del cub os nassarita

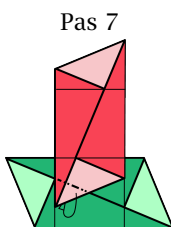


Desenvolupament del cub avió nassarita

Es poden construir cubs amb els tres motius anteriors amb sis mòduls idèntics fent determinats plecs. El primer motiu, un quadrat llis, es correspon al cub de Sonobe. El cub avió nassarita es pot fer amb els plecs següents:



Mòdul final

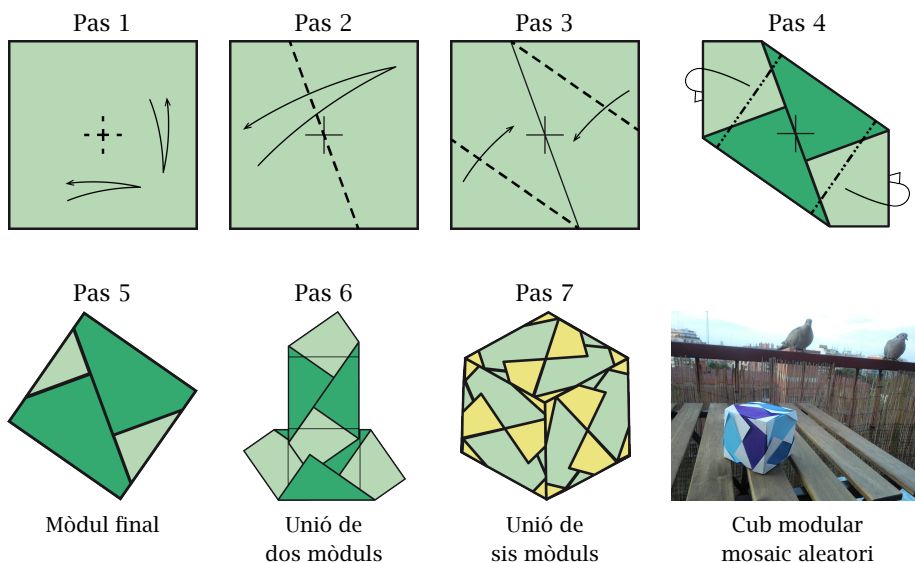


Unió de dos mòduls

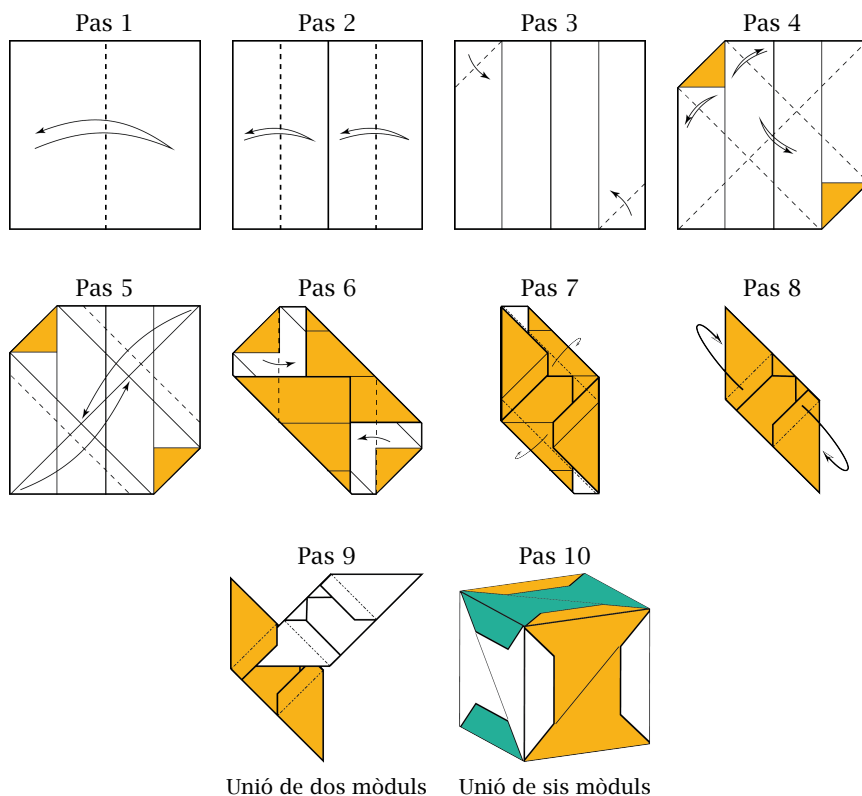


Unió de sis mòduls

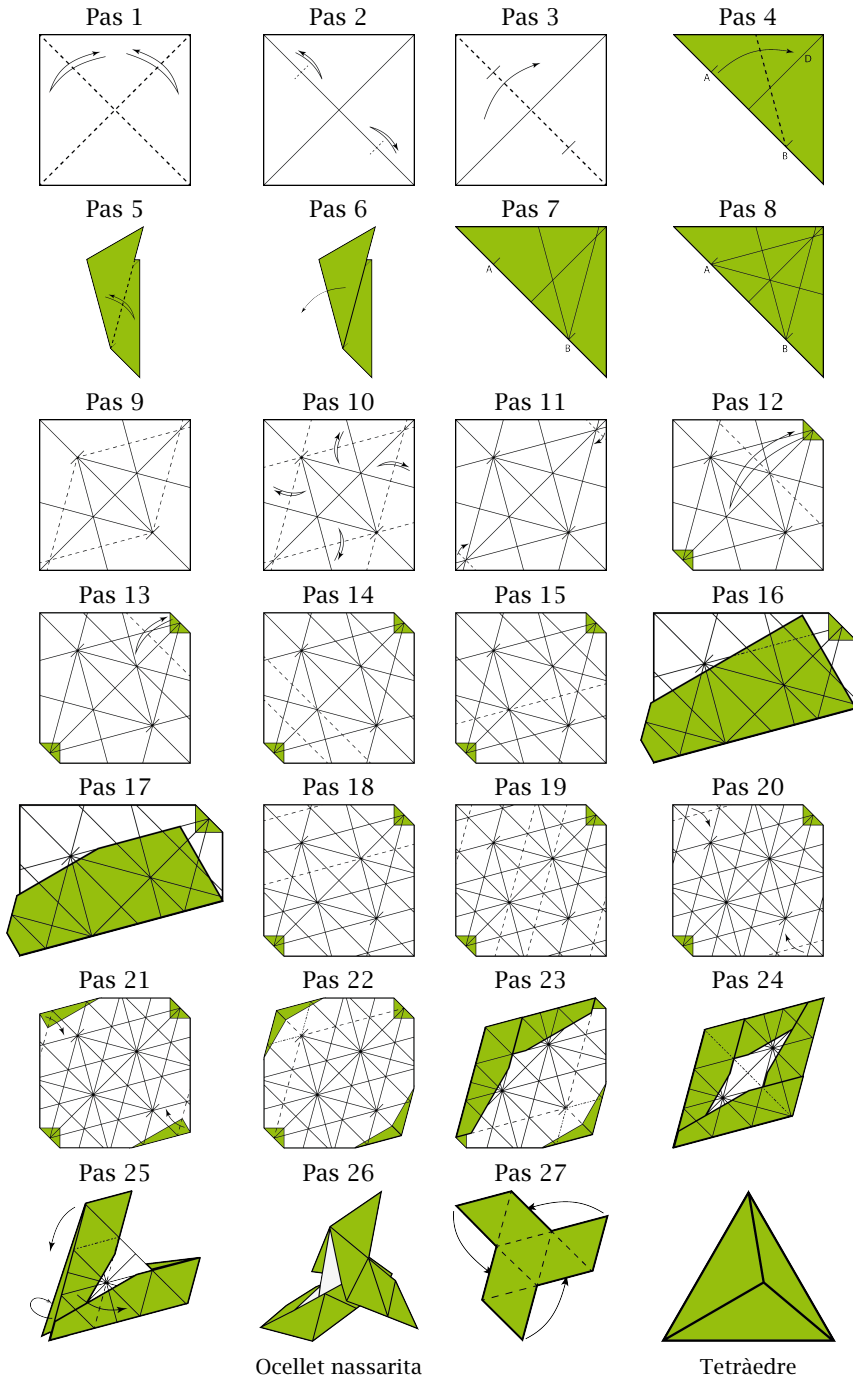
Si a la construcció anterior, en lloc de la diagonal, prenem un segment que passi pel centre del quadrat amb pendent aleatori $m \in \mathbb{R}$, aleshores obtenim una infinitud no numerable de motius.



La tessellació del cub amb el motiu os nassarita es pot fer amb els plects següents:



Finalitzem aquesta dissertació amb una figura no modular multiforme: la construcció d'un tetràedre obtingut mitjançant el col·lapse d'un ocellet nassarita tridimensional.



Agraïments

A Minerva Ciruela per introduir-me en el món de la papiroflèxia; a Juan Gimeno per les seves converses sobre el tema; a Joan Sallas per convidar-me a experimentar i desenvolupar aquestes idees en les jornades FALTIK a Friburg de Brisgòvia i en les jornades APLEC a Badalona; a Carmen Sprung per deixar-me publicar els seus diagrames, i a David Brill per facilitar-me la imatge d'una sessió del Sosaku Origami Group 67 en què apareixen Toshie Takahama i Mitsunobu Sonobe.

Referències

- [1] ANÒNIM. *Una hoja de papel*. 2a ed. Barcelona: Miguel A. Salvatella, 1964.
- [2] CROMWELL, P. R. *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [3] DIFERENTS AUTORS. *Guía práctica del arte manual*. Barcelona: Kairós, 1977.
- [4] FREUDENTHAL, H.; VAN DER WAERDEN, B. L. «Over een bewering van Euclides». *Simon Stevin*, 25 (1947), 115-128.
- [5] FYODOROV, Y. «Simmetrija na ploskosti». *Zapiski Imperatorskogo Sant-Petersburgskogo Mineralogicheskogo Obschestva*, s. 2, 28 (1891), 245-291.
- [6] KASAHARA, K.; TAKAHAMA, T. *Papiroflexia para expertos*. Madrid: EDAF, 2011.
- [7] MILLER J. C. P. *Polyhedron*. 11a ed. Encyclopædia Britannica. Nova York: University Press, 1910.
- [8] MONTESINOS, J. M. *Classical Tessellations and Three-Manifolds*. Berlín: Springer-Verlag, 1987. (Universitext)
- [9] MÜLLER, E. «El estudio de ornamentos como aplicación de la teoría de grupos de orden finito». *Euclides (Madrid)*, 6 (1946), 42-52.
- [10] PLATÓ. *Timeu Crítias*. Barcelona: Edicions 62, 2010.
- [11] RINGEL, G.; YOUNGS, J. W. T. «Solution of the Heawood map-coloring problem». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 60 (1968), 438-445.
- [12] SOLÓRZANO, V. *Papirolas. Tratado de papiroflexia. Figuras geoméricas de papel doblado*. Buenos Aires: Librería de la Salud, 1939.
- [13] SOLÓRZANO, V. *Tratado de papiroflexia superior*. Buenos Aires, 1945.
- [14] SOMMERVILLE, D. M. Y. «Semi-regular networks of the plane in absolute geometry». *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 41, part III, 29, 725-747.
- [15] SOSAKU ORIGAMI GROUP '67. *Atarashii Origami Nyumon*. Tòquio: Nihon Bungeisha, 1970.
- [16] VON STAUDT, K. *Geometrie der lage*. Nuremberg: Verlag von Bauer und Raspe, 1847.
- [17] TAKAHAMA, T. *Creative Life with Creative Origami 1*. 1974. [En japonès]

- [18] DE UNAMUNO, M. *Amor y pedagogía. Apuntes para un tratado de cocotología*. Barcelona: Espasa Calpe, 1964. (Austral; 141)
- [19] VER EECKE, P. *Pappus d'Alexandrie. La collection mathématique*. París: Blanchard, 1982.

CENTRE DE FORMACIÓ DE PERSONES ADULTES RAFAEL FARRÉ (MOLINS DE REI)

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

jaume.coll.guerrero@uab.cat